#1 ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε $\det A > 0$

Απόδειξη:

$$\det A = \det(L\cdot L^T) = \det L \cdot \det L^T = \prod_{i=1}^{n} e_{ii}^2 > 0$$

#2 ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε το απόλυτα μεγαλύτερο στοιχείο του βρίσκεται στη διαγώνιο

Απόδειξη:

Διαγράφουμε $n-2$ γραμμές και $n-2$ στήλες εκτός από τις i και j. Τότε

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$ όπου από το Πρώτο Θεώρημα

A_{ij} συμμετρικός και θετικά ορισμένος $\Rightarrow \det(A_{ij}) > 0 \overset{\text{συμμετρικός}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow \alpha_{ii}\alpha_{jj} - \alpha_{ij}^2 > 0 \Rightarrow \max\{\alpha_{ii}, \alpha_{jj}\}^2 - \alpha_{ij}^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{\alpha_{ii}, \alpha_{jj}\} > |\alpha_{ij}|$, ισχύει $\forall\, i,j$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι κύριες υποορίζουσές του (της άνω αριστερής γωνίας δίχως βλάβη της γενικότητας) είναι θετικές.

Απόδειξη:

{⇒}: Κάθε κύριος υποπίνακας θα είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε $\det A > 0$

{⇐}: Αφού οι υποορίζουσες της άνω αριστερής γωνίας είναι θετικές τότε κατά την απαλοιφή Gauss θα ισχύει $\det(A_{pp}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{pp}^{(p)} > 0$

$\Rightarrow a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, p$ επαγωγικά έχουμε ότι και

για $p = n \Rightarrow a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, p, \ldots, n$

Έτσι, $A = L \cdot U = L \cdot D \cdot L'^{T}$ όπου $D = diag(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn})$

Έτσι, λόγω συμμετρικότητας και αφού

$(L D L^{T})^{T} = L D L^{T}$, τότε

Έχουμε ότι

$A = L \cdot D \cdot L^{T}$ (Παραγοντοποίηση Crout)

Στη συνέχεια

$L \cdot D L^{T} = \underbrace{L \cdot D^{1/2}} \cdot \underbrace{D^{1/2} \cdot L^{T}} = L' \cdot L'^{T}$ επομένως, γίνεται η παραγοντοποίηση Cholesky, που σημαίνει ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εάν γίνεται η ανάλυση Cholesky, τότε ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (Αντίστροφο θεώρημα Cholesky)

Απόδειξη:

$A^{T} = (L L^{T})^{T} = L \cdot L^{T} = A$ συμμετρικός

Έστω $x \in \mathbb{R}^{n} \setminus \{0\}$, τότε

$(x, Ax) = (x, L^{T} L x) = (L^{T} x, L^{T} x) = \|L^{T}\|_2^2 > 0$

Έστω $\|L^{T} x\|_2 = 0 \Leftrightarrow L^{T} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική λύση (Άτοπο)

Επομένως, $(x, Ax) > 0 \Rightarrow A$ θετ. ορισμένος

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ CHOLESKY ΣΕ 3×3 ΠΙΝΑΚΕΣ:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}$$

A συμμετρικός και θετικά ορισμένος

Έτσι,

$$l_{11}^2 = a_{11} \Leftrightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{21} l_{11} = a_{21} \Leftrightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Leftrightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$l_{31} \cdot l_{11} = a_{31} \Leftrightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$$

$$l_{31} l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} = a_{32} \Leftrightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{31}}{l_{22}}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \Leftrightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ CHOLESKY ΚΑΤΑ ΓΡΑΜΜΕΣ

Για $i = 1(1)n$

  Για $j = 1(1)i-1$

    $l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}) / l_{ij}$ // $(e^{(i)}, e^{(j)}) = l_{i1} + l_{j1} + \dots + l_{ij} + l_{ji} = a_{ij}$

  τέλος 'Για'   // $\Leftrightarrow l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{jj}$

  $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$ // $(e^{(i)}, e^{(i)}) = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{ii}^2 = a_{ii}$

Τέλος 'Για'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ερμιτιανός και θετ. ορισμένος, χρησιμοποιώντας τον ορισμό νδο

i. $a_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$ (ή $i = 1, \dots, n$)

ii. $\lambda_i > 0$, $i = 1(1)n$ (ή $i = 1, \dots, n$), λ_i ιδιοτιμή του A

ΛΥΣΗ

i. Έστω $x = e^{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε $(x, Ax) = a_{ii} > 0$

ii) Θεωρούμε $x = x^{(i)} \neq 0$, το ιδιοδιάνυσμα της λ_i με $\|x^{(i)}\|_2 = 1$

$$(x, Ax) = (x^{(i)}, Ax^{(i)}) = (x^{(i)}, \lambda x^{(i)}) = \lambda (x^{(i)}, x^{(i)}) = \lambda > 0$$

2) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας
$A = tdid(-1, 2, -1)$
δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ είναι θετικά ορισμένος

ΛΥΣΗ

Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ με $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

τότε

$$(x, Ax) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \vdots \\ -x_{n-1} + 2x_n \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - \ldots - 2x_{n-1}x_n + 2x_n^2 =$$

$$= x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + \ldots + (x_n - x_{n-1})^2 + x_n^2 > 0$$

Διότι $x \neq 0$.

2ος τρόπος (Μέσω των κύριων υποορίζουσών)

Επιλέγουμε να υπολογίσουμε την $\det(A_n)$

και ΘΔΟ $\det(A_n) = n+1$

Επαγωγικά

για $n=1$, $\det(A_1) = 2 = 1+1$ Ισχύει!

Έστω ισχύει για τυχόν k και ΘΔΟ ισχύει για $k+1$

Δηλ. ισχύει για όλα τα A_i, $i = 1, \ldots, k$

Άρα, $\det(A_k) = k+1$ και ΘΔΟ $\det(A_{k+1}) = k+2$

Έτσι, $\det(A_{k+1}) = 2 \cdot \det(A_k) + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \cdots \\ & & \ddots \end{bmatrix} =$

$= 2\det(A_k) - \det(A_{k-1}) = 2(k+1) - k = k+2.$

3) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(Άσκηση 6 Από βιβλίο)}$$

Θετικά ορισμένος: $\det 9 = 9 > 0$, $\det \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 36 > 0$

$$\det A \overset{\text{Sarrus}}{=\!=} 216 + \cancel{72} + \cancel{72} - 72 - \cancel{144} - 108 = 36 > 0$$

Εφαρμόζουμε την Ανάλυση Cholesky

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot L^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{3} & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ανάλυση Crout:

$$A = L \cdot D \cdot L^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LU Ανάλυση:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= L' L'^T$$

. Ευρεση αντιστροφου μεσω Cholesky

$$Ax = I \Rightarrow LL^T x = I \Rightarrow \begin{cases} Ly = I \\ L^T x = y \end{cases}, \quad L^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επιλυοντας τα 2 συστηματα παραπανω βρισκουμε

$$Y^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^T = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Δινεται ο πινακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 29 & 22 \\ 1 & 10 & 22 & 42 \end{bmatrix}$$

. Να παραγοντοποιηθει ο A σε γινομενο LDU με L: κατω τριγ. με μοναδ. στη διαγωνιο και U: ανω τριγων. με μοναδ στη διαγωνιο και ο πινακας D: η διαγωνιος του A. Χρησιμοποιωντας την εν λογω παραγοντοποιηση νδο ο πινακας A ειναι θετικα ορισμενος και στη συνεχεια να δοθει η αναλυση Cholesky:

ΛΥΣΗ

πολ/στες

↓	1	0	2	1
0	0	4	8	10
2	2	8	29	22
1	1	10	22	42
		4	8	10
2		8	25	20
5/2		10	20	41
			9	0
			0	16

Άρα,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 5/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 8 & 10 \\ 0 & & 9 & 0 \\ & & & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 5/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 4 & & \\ & & 9 & \\ 0 & & & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 5/2 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= LDL^T = LD^{1/2} \cdot D^{1/2} \cdot L^T = L' \cdot L'^T$$ ανάλυση Cholesky.

Όπου,

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 5/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 2 & & \\ 2 & 4 & 3 & \\ 1 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$